Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1988

MATHEMATIQUES
1ère épreuve (option économique)

Coefficient 4

Vendredi 13 mai 1988 de 14 heures à 18 heures

Nota :

– Les quatre exercices sont indépendants.

IN désigne l'ensemble des entiers naturels, et IR celui des nombres réels.

EXERCICE 1

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (3x - 2y, 2x - 4z, y - 3z).$$

1. Écrire la matrice A de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les valeurs propres de A. En déduire que A n'est pas inversible et que A est diagonalisable.
3. Calculer A^2, A^3. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x - \frac{1}{4}(x + 1)e^{-x}.$$

1. a) Calculer f' et f'', fonctions dérivées première et seconde de f. Étudier les variations de f'. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution α et que $-1,3 < \alpha < -1,2$.

   b) En déduire le sens de variation de f.

   c) Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Préciser les branches infinies de la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé.

   d) Tracer la courbe C.

2. On considère la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \frac{1}{4}(u_n + 1)e^{-u_n}. \end{cases}$$

   Montrer que, pour tout entier $n > 0$, $-1 < u_n < 0$ et que la suite u est décroissante. Trouver sa limite.

EXERCICE 3

1. Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts (n est un entier, $n \geqslant 2$).

   On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$), et la probabilité de ne pas l'obtenir est q, avec $q = 1 - p$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

   Quelle est la loi de X ? Calculer l'espérance E(X) et la variance V(X).

2. Après ses n recherches, la secrétaire demande une deuxième fois, et dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et soit $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.

   a) Quelles sont les valeurs prises par Z ?

   b) Calculer les probabilités $p_0 = P(Z = 0)$, $p_1 = P(Z = 1)$.

   Montrer que $p_1 = npq^{2n-2}(1 + q)$.

   c) Calculer la probabilité conditionnelle $P((Y = h)/(X = k))$, pour $k \in \{0, 1, ..., n\}$, $h \in \{0, ..., n - k\}$.

   d) Démontrer $P(Z = s) = \sum_{k=0}^{s} P((X = k) \cap (Y = s - k))$, pour tout $s \in \{0, 1, ..., n\}$.

   e) Calculer $p_s = P(Z = s)$, et montrer que Z suit une loi binômiale, de paramètres $p(1 + q)$ et q^2 (on pourra vérifier $C_n^k C_{n-k}^{s-k} = C_n^s C_s^k$).

EXERCICE 4

ln désigne le logarithme népérien.

1. a) Vérifier, pour tout réel x de $[0, +\infty[$: $0 \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x$.

   b) En déduire la limite, quand l'entier n tend vers $+\infty$, de $\int_0^1 \ln(1 + x^n)dx$.

2. Soit u la suite réelle définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^n} dx$.

   a) Montrer que, pour tout entier n non nul : $u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1 + x^n)dx$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

   b) En déduire la limite de u_n et celle de nu_n quand l'entier n tend vers $+\infty$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail